Revista Tlamati Sabiduría

Volumen I, Número 1. Abril-Junio 2009

Título del artículo.

Un modelo de reproducibilidad de situaciones didácticas para la conceptualización del límite.

Autor.

Juan Baltazar Cruz Ramírez

Referencia bibliográfica:

MLA

Juan Baltazar Cruz Ramírez. " Un modelo de reproducibilidad de situaciones didácticas para la conceptualización del límite.” *Tlamati*. I.1 (2009): 40-49. Print.

APA

Cruz Ramírez, J. B. (2009). Un modelo de reproducibilidad de situaciones didácticas para la conceptualización del límite. *Tlamati*, *I*(1).

ISSN: 2007-2066.

Dirección General de Posgrado e Investigación
Dirección de Investigación

UN MODELO de reproducibilidad de situaciones didácticas para la conceptualización del LÍMITE

Juan Baltazar Cruz Ramírez
Juan Baltazar Cruz Ramírez
Juan Baltazar Cruz Ramírez
Juan Baltazar Cruz Ramírez
Juan Baltazar Cruz Ramírez
Juan Baltazar Cruz Ramírez
Juan Baltazar Cruz Ramírez

INTRODUCCIÓN

Aún cuando el uso de elementos de enseñanza electrónica es usado cada vez más por los profesores de matemáticas, esta tecnología no se incorpora aún de manera decisiva a la práctica escolar, por lo que se vuelve cada vez más urgente identificar los puntos alrededor de los cuales organizar el uso de la enseñanza electrónica en la educación matemática. El diseño, manejo y capacitación en estos sistemas deben formar parte de una estrategia global de enseñanza-aprendizaje que incluya, de manera categórica, la tarea del profesor cuya actividad sigue siendo básica, ya que es quien va marcando los ritmos del aprendizaje, quien resalta las ideas esenciales o estrategias interesantes y, en definitiva, quien tiene la responsabilidad de organizar y dirigir la interacción del estudiante con la computadora. Los resultados de Dunham (1991) señalan que las tecnologías gráficas promueven cambios positivos en las actitudes y en la interacción de las clases. En un ambiente de enseñanza electrónica, tanto el profesor como los estudiantes pueden estar inmersos dentro de un contexto motivador y envolvente, en el cual se pueden prever algunas fases de actividad y de toma de decisiones personalmente administradas, en réplica a los problemas presentados. Las herramientas de la enseñanza electrónica dotan al estudiante de varias ventajas, tales como gestionar habilidades, como la graficación de funciones de manera más eficiente, utilizar varios registros semióticos (Duval 1999) a la vez (algebraico, gráfico y numérico), así como enfocar su atención en aspectos cualitativos en vez de los procedimientos para analizarlos.

Σ

RESUMEN.

Se desarrolló una modelación de ingeniería didáctica para la enseñanza del concepto de límite mediante el uso de asíntotas y sus gráficas dinámicas, como una alternativa de solución de los problemas presentados a nivel precálculo de este concepto. Posteriormente fue puesta en escena en diferentes sistemas didácticos por los profesores participantes. Los resultados obtenidos muestran una clara similitud de las deducciones y soluciones de los problemas resueltos por los alumnos del grupo inicial y los de los diferentes sistemas didácticos en los cuales fueron aplicados.

Palabras Clave: Límites, Asíntotas, Ingeniería Didáctica.

SUMMARY.

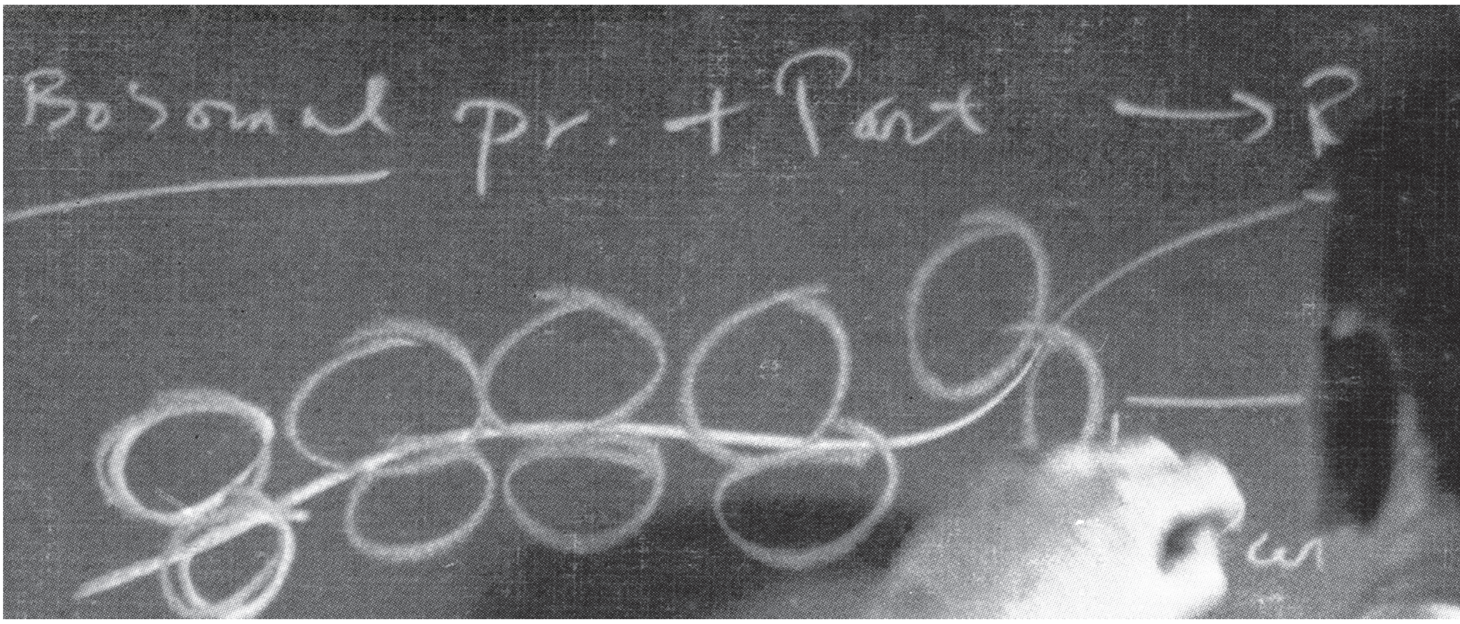
Development a modeling of a didactic engineering for the education of the concept of limit by means of the use of asymptotes and its dynamic graphs, like an alternative of solution of the problems presented at level precalculation of this one concept. Later it was put in scene in different didactic systems by the participant professors. The obtained results show to a clear similarity of the deductions and solutions of the problems solved by the students of the initial group and those of the different didactic systems in which they were applied.

Keywords: Limits, Asymptotes, Didactic Engineering

∞

En el entorno de la enseñanza electrónica el estudiante es cuestionado a hacer explícito el modelo implícito que él ha construido “actuando”, así como para hacer explícitas las relaciones entre las variables, la escritura de la fórmula y la realización de un algoritmo. En este caso, el diseño de las situaciones didácticas por parte de los profesores participantes en el desarrollo de la modelación de la ingeniería didáctica permite nuevas maneras de modelar y representar matemáticas.

Desde que el aprendizaje es una construcción social, es oportuno que estas situaciones estén en una situación particular de comunicación; los modelos explícitos de cada estudiante pueden ser compartidos y discutidos con otros estudiantes y profesores.



MATERIALES Y MÉTODOS PARA UNA MODELACIÓN DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA PROPUESTA PARA LA REPRODUCIBILIDAD.

Con el objetivo de que la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) planteada considere la reproducibilidad y sea aplicable en un sistema didáctico diferente para el que originalmente fue planteada, nos sustentamos en los resultados sobre reproducibilidad de situaciones didácticas (Lezama, 2003), y para su desarrollo consideramos e integramos en su diseño estos tres campos de acción.

- Estructura de la Ingeniería Didáctica
- Comunicación del escenario
- Adaptación al nuevo sistema didáctico

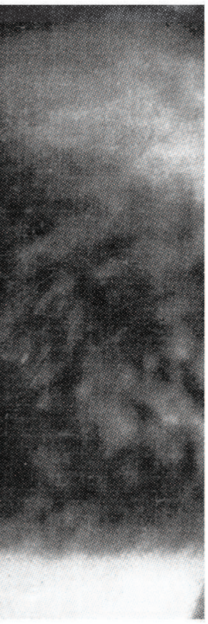
Esta modelación fue inicialmente analizada, diseñada y aplicada por cinco profesores de Cálculo Diferencial e Integral del Nivel Medio Superior de cada uno de los siguientes Sistemas Educativos: Escuela Preparatoria de la Universidad Autónoma de Guerrero, Preparatoria Abierta de la UAG, Colegio de Bachilleres del Estado de Guerrero y Centro de Bachillerato Tecnológico e Industrial del Estado de Guerrero.

Esto con la intención de que los resultados obtenidos durante el proceso fueran aplicados en diferentes sistemas didácticos, cada uno con su propia metodología y programas de estudio, a manera de validación de las situaciones didácticas aplicadas y como insumo de datos de investigación del proyecto planteado.
La intención de la Ingeniería Didáctica propuesta, tuvo los siguientes objetivos:

- Modificar la concepción de asíntotas utilizadas en el proceso de análisis de una gráfica.
- Lograr la significación de las asíntotas como una noción a nivel precálculo del límite.
- Predecir, a través de las asíntotas, los límites de la curva analizada.

ANÁLISIS A PRIORI

De los análisis epistemológico, cognitivo y didáctico, podemos observar los siguientes problemas: La convención matemática (Martínez, 2003) puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados al momento de la integración sistémica de un conjunto de conocimientos y puede tomar la forma de una definición, un axioma, una interpretación o una restricción, entre otras. Además, una de las condiciones que debe tener una convención matemática es que su uso no entra en conflicto con el sistema axiomático en el que es usada.
En Cruz (2006) y de acuerdo a la definición anterior, identificamos como una convención matemática a la noción de asíntota ya que a lo largo de su historia, sus diferentes propiedades y concepciones han sido integradas sistemáticamente dentro de un conjunto de conocimientos y su aplicación no entra en conflicto con los sistemas axiomáticos en los que es usada. Además de completar los vacíos en las diferentes definiciones utilizadas a través del tiempo y dar sustento a teoremas sin los que la existencia de estas definiciones no podrían ser probados.



Dentro del aula, las asíntotas sólo son estudiadas como rectas horizontales, verticales y diagonales, estando estas definiciones estrechamente ligadas al estudio de las hipérbolas. Por esta razón, los estudiantes usualmente no tienen conocimiento sobre otro tipo de asíntotas tales como las curvas o las usadas en estudios de población, por dar un ejemplo. En este trabajo consideramos que las asíntotas, por su condición de tendencia al infinito, pueden representar una oportunidad para utilizarlas en el desarrollo de la concepción del límite.
Cuando se empieza a trabajar en la búsqueda de límites de funciones y su definición, en la mayoría de los libros consultados (Caballero, 2005), (Coolidge, 1963), (Goodman, 1980), (Granville, 1980), (Lehman, 1984), (Lucas y James, 1979), los autores presuponen que L es un número pero no lo definen explícitamente. El análisis de límites en la escuela y en los libros consultados tiene un enfoque puramente algebraico y al seguir los estudiantes un razonamiento de este tipo, pueden presentar problemas cuando traten de caracterizar la existencia del límite.
Así mismo, cuando se analizan límites laterales y su existencia, una de las situaciones que vamos a encontrar en el análisis de estos límites, al tratar de determinar el valor del límite L tanto por la izquierda como por la derecha, ambos tiendan a la vez a $-\infty$ o a ∞ o surjan indeterminaciones como:

$$\frac{0}{0} \text{ o } \frac{\infty}{\infty}$$

Regularmente, la solución a este tipo de límites requiere de una habilidad algebraica muy desarrollada o para encontrar la solución, los profesores utilizan herramientas que los estudiantes todavía no conocen.

ESTRUCTURA DE LA INGENIERÍA DIDÁCTICA.

Para la aplicación de los problemas planteados originalmente en su concepción tradicional, fueron propuestos para su resolución a cinco profesores de cálculo en activo del nivel medio superior, con el objetivo de observar y diagnosticar cuáles son los elementos matemáticos usados al interior del entorno escolar, así como las diversas acciones, validaciones y formulaciones realizadas en los problemas a resolver.

La propuesta original antes de la adaptación al nuevo sistema didáctico en donde finalmente se aplicó es resultado del análisis de cerca de 70 ejercicios propuestos por los mismos profesores, los cuales se fueron depurando para llegar a tres ejercicios finales.

El diseño de los problemas fue desarrollado por los profesores en el Sistema E+ (Cruz, 2005) y los pizarrones virtuales utilizan el *applet* Descartes (2008) programados desde el Sistema E+ para su funcionamiento.

Problema No. 1.
Analizar la curva $y = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$ (véase la Figura 1)

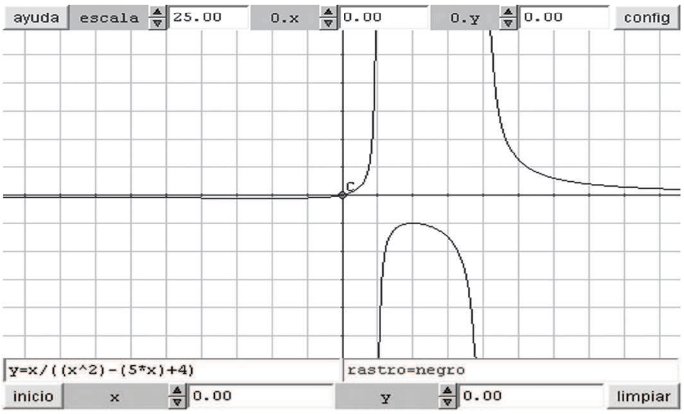


Figura 1.- Gráfica con asíntotas.

En esta gráfica, las rectas *x=1*, *x=4*, *y=0* marcan la tendencia asintótica de la curva, por lo que se preguntará a los estudiantes cuáles son los valores de *x*, *y* cuando *x* se acerca a 1 y 4, tanto por la izquierda como la derecha, con el objetivo de descubrir si son capaces de predecir si existe el límite unilateral.

Observaremos si los estudiantes son capaces de indicar si los valores encontrados son los límites unilaterales existentes en las asíntotas.

Estos límites son:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2 - 5x + 4} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2 - 5x + 4} = 0$$

Observamos que los límites unilaterales en *x=1*, *x=4* no tienden hacia el mismo valor. Se observará cuál es la idea que los estudiantes tienen sobre estos valores.

Problema No. 2.

Analizar la curva $y = \dfrac{5x^3 + 2}{3x^2}$

Esta curva tiene dos asíntotas, la recta $y = \dfrac{5}{3}x$ y la asíntota vertical *x=0*, se propone el análisis de esta curva porque cuando $x \to 0$, el límite de *y* tanto por el lado izquierdo como por el derecho tiende al infinito, lo que nos permitirá observar cómo caracterizan los estudiantes el comportamiento de la curva y si pueden predecir estos límites (véase la Figura 2).

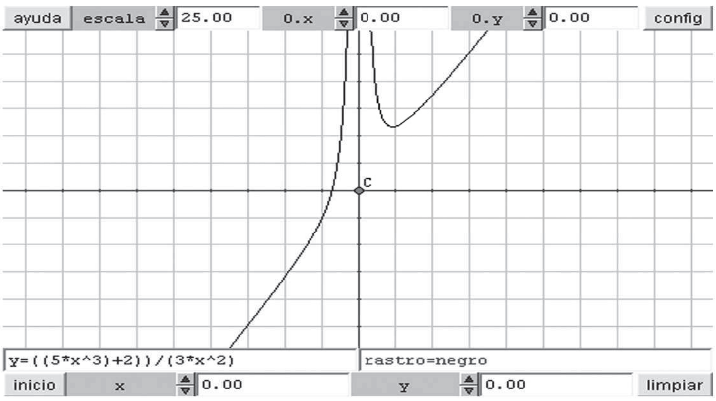


Figura 2. Gráfica con asíntotas izquierda y derecha positivas.

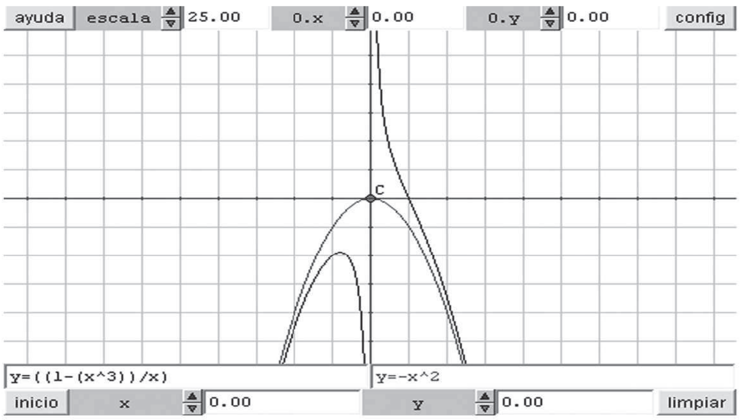
Una de las propuestas es que los estudiantes ocupen sus conocimientos previos en la solución algebraica que puedan proponer para estas curvas, tratando de evitar al máximo el trabajo solamente en este plano. Se tratará de que utilicen las tres representaciones propuestas, la gráfica, numérica y algebraica como elementos integrados de análisis de la curva y sus predicciones sobre los límites.
Se pretende observar si al factorizar la ecuación, los factores resultantes pueden proveer de información sobre los límites de la curva y observar cuál es la idea que sobre este comportamiento de la curva tienen.

Problema No. 3

Analizar la curva $y = \dfrac{1 - x^3}{x}$ (véase la Figura 3)

Esta curva tiene dos asíntotas: la recta $x=0$ y la parábola $y = -x^2$; cuando $x \longrightarrow 0$ por la derecha y tiende a ∞, cuando $x \longrightarrow 0$ por la izquierda y tiende a $-\infty$, como podemos observar en la figura , cuando x tiende a $-\infty$ y ∞, y tiende a $-\infty$ pero siguiendo asintóticamente a la parábola $y = -x^2$.

Figura 3. Gráfica con asíntota curva



COMUNICACIÓN DEL ESCENARIO

Enfocamos los problemas en la aportación de datos para comprobar la hipótesis presentada, todas las curvas utilizadas tienen una asíntota de diferente tipo caracterizada como límite; hemos usado como asíntotas a los ejes cartesianos, rectas verticales, horizontales, inclinadas así como curvas, pero siempre enfocadas en su uso como elementos de análisis para la predicción de los límites en los diferentes puntos a analizar.
Después de que los profesores participantes discutieran entre sí y resolvieran los problemas planteados sin contar con el apoyo tecnológico facilitado a los estudiantes, utilizaron los métodos algebraicos clásicos en la enseñanza tradicional de la idea y el concepto de asíntota y el límite. Después de analizar las soluciones, se procedió a hacer un análisis de los problemas enfocándonos esencialmente en todos los puntos en donde las curvas presentaban una asíntota, con el objetivo de caracterizar tanto la vida de la asíntota como límite de una función, como el del límite mismo.
Esto nos sirve a su vez como parámetro, elemento de diagnóstico y como una prueba de la concepción de límite manejada por los profesores en su vida escolar. También nos sirvió de referencia y nos ayudó a depurar los problemas originalmente planteados, a efecto de evitar redundancias y repeticiones innecesarias en la aplicación y puesta en escena de la situación ante los estudiantes escogidos, con lo que la participación y sugerencias de los profesores sirvieron de apoyo en el desarrollo de la propuesta final de la situación.
Se localizaron los problemas que mayor dificultad tenían para encontrar su solución por el método tradicional (indeterminaciones tales como la división entre cero, cero entre cero o infinito entre infinito y la existencia del límite en un punto) a manera de comparación entre la propuesta tradicional y la situación didáctica propuesta.

ADAPTACIÓN AL NUEVO SISTEMA DIDÁCTICO

Los antecedentes matemáticos indispensables de los alumnos obligatorios para la aplicación de la propuesta son el de haber llevado la materia de Geometría Analítica, ya que la comprensión de los conceptos utilizados en el desarrollo planteado, son estudiados durante el desarrollo de esta materia.
Conceptos tales como intercepciones con los ejes, simetría, extensión de una curva, la idea de asíntotas y la identificación del lugar geométrico de un punto en una curva son la base en la que se desarrolla la propuesta. El concepto de ecuación y operaciones con polinomios son también recomendables.

Como elemento necesario pero no indispensable, se procuraría que el trabajo matemático no fuera su principal actividad, ya que los alumnos con este perfil son mayoría en el entorno escolar por lo que sus resultados serán representativos de la dificultad que el concepto de límite tiene entre estos alumnos, así como su actitud ante la propuesta planteada. Como veremos en el análisis de resultados, la situación propuesta no sólo pretende influir en los alumnos, sino que también pretende aclarar ciertos conceptos y definiciones sobre límites que a pesar de existir en los libros de texto, no son usados en el ámbito escolar.

PUESTA EN ESCENA Y EXPERIMENTACIÓN

La propuesta adaptada fue primero puesta en escena con tres participantes, dos mujeres y un hombre a quienes llamaremos estudiantes A, B y C. El estudiante A tiene estudios de Contaduría y Administración, la estudiante B está cursando la Licenciatura en Educación Preescolar y la estudiante C está elaborando su tesis de Maestría en Educación. Todos ellos llevaron Geometría Analítica.

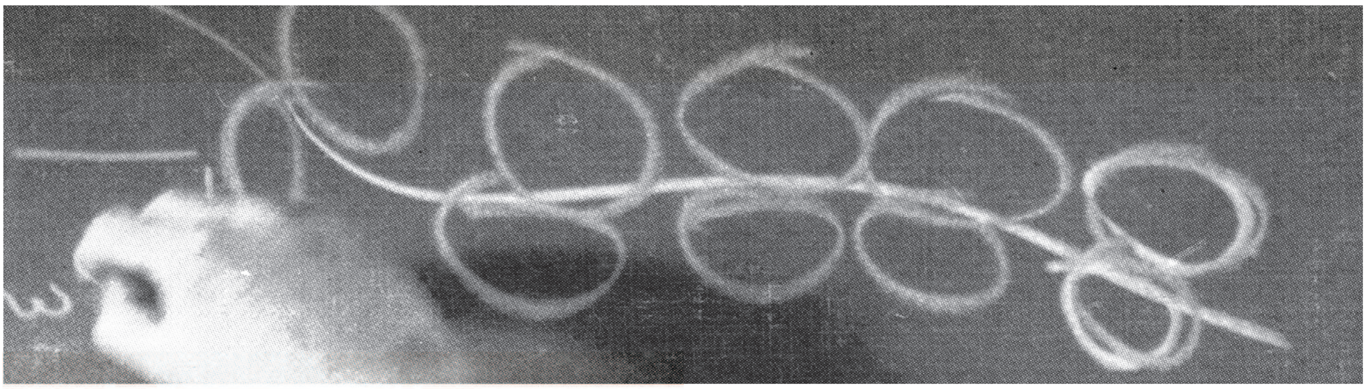
Para el análisis de resultados se consideraron las siguientes representaciones:

- Algebraica (La ecuación de la curva).
- Numérica (La indicación de las coordenadas y los parámetros variables en las que se está trabajando y su tabulación dinámica).
- Gráfica (La gráfica de la curva).
- Oral (Lo que el estudiante externa oralmente durante el desarrollo de la situación).
- Escrita (Lo que el estudiante plasma en su hoja de trabajo).

La manera en que se estudiaron estas representaciones fueron: dejando constancia de la grabación del video, la transcripción de las interacciones, las hojas de trabajo tanto de los profesores como de los alumnos y el diseño de un pizarrón virtual en el que se presenten la relación a analizar, la gráfica, un tabulador y los parámetros que permiten variar la gráfica de la ecuación utilizando un marcador indicado como un punto rojo que nos permite moverlo con el ratón para variar los parámetros, mismo que sigue la curva de la gráfica presentada.

Se hizo el análisis de la puesta en escena, problema por problema y resumida en una visión de conjunto, para finalmente llegar a una conclusión y a una propuesta de cómo puede ayudar a clarificar la enseñanza de estos conceptos en el entorno escolar. Después de haber analizado los resultados obtenidos en esta primera puesta en escena, como anteriormente se comentó, los problemas propuestos fueron posteriormente puestos en escena por los profesores dentro de su clase normal, obteniendo resultados similares a los encontrados en la primera puesta en escena.

En el análisis de resultados, la situación propuesta no sólo pretende influir en los alumnos, sino que también pretende aclarar ciertos conceptos y definiciones sobre límites



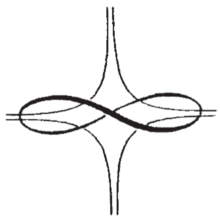
DISCUSIÓN Y RESULTADOS (*ANÁLISIS A POSTERIORI*)

Desarrollamos una visión de conjunto basados en el análisis problema por problema que desarrollamos en esta sección (véase la Tabla 1).

	Problema 3 Identificar las asíntotas verticales y horizontales de la curva		Problema 4 Identificar la asíntota vertical y la asíntota diagonal		Problema 5 Identificar la asíntota vertical y la asíntota curva		Predicción del límite Uso de la asíntota en la predicción del límite y su correcta predicción
Estudiante A	$X=1$	✓					
	$X=4$	✓	$X=0$	✓	$X=0$	✓	✓
	$Y=0,\ x\to\infty$	✓					
	$Y=0,\ x\to-\infty$	✓		✓	$y=-x^2$	✓	
Estudiante B	$X=1$	✓					
	$X=4$	✓	$X=0$	✓	$X=0$	✓	✓
	$Y=0,\ x\to\infty$	✓					
	$Y=0,\ x\to-\infty$	✓	$y=\frac{5}{3}x$	✓	$y=-x^2$	✓	
Estudiante C	$X=1$	✓	$X=0$	✓	$X=0$	✓	✓
	$X=4$	✓					
	$Y=0,\ x\to\infty$	✓					
	$Y=0,\ x\to-\infty$	✓	$y=\frac{5}{3}x$	✓	$y=-x^2$	✓	

Tabla 1. Visión de Conjunto

Resultados similares fueron obtenidos por los profesores durante su puesta en escena en las aulas en donde normalmente dan clase, por lo que podemos decir que las situaciones didácticas fueron validadas al interior de los diferentes sistemas en las cuales fueron aplicadas.
Las asíntotas son un elemento visual muy poderoso ya que muestra al límite como un "muro" al que la curva se acerca sin llegar a tocarlo ni rebasarlo. Esta característica es lo que nos permite visualizar el comportamiento de la curva estudiada y basados en este comportamiento los estudiantes tienen elementos para poder predecir el límite de la curva.



El límite de las asíntotas en el infinito es otra de las concepciones usadas. Recalcamos que el límite, si existe, tiene un valor y éste debe ser un número real y aún cuando el infinito no cumple con esta definición es utilizada como respuesta correcta, lo que reafirma su carácter de convención matemática. El análisis de la tendencia de la curva mediante las herramientas diseñadas se hace pertinente y nos permite caracterizar al límite dentro de los números reales.

CONCLUSIONES

El trabajo dinámico sincronizado en los registros tabular, gráfico y algebraico.

La conceptualización de la idea de límite representa un serio obstáculo para la articulación entre registros. El desarrollo de una herramienta que le permita al alumno trabajar al mismo tiempo en al menos dos registros sincronizados y dinámicos, permite sortear en parte esta dificultad.

Las conversiones entre los registros gráfico y tabular no existen con el uso del pizarrón virtual, ya que los registros se trabajan sincronizados al mismo tiempo. Si a esto aunamos el control sobre el punto que se quiere analizar, resuelve el problema de las actividades de conversión por parte del estudiante, ya que éstos dejan de ser mecánicos y tediosos.

Tradicionalmente, los estudiantes han encontrado en la graficación punto a punto una manera de llegar a la respuesta correcta, eludiendo por completo las significaciones gráficas de los parámetros presentes en la expresión algebraica, el registro tabular utilizado como registro de partida puede resultar incompleto ya que no alcanza a cubrir todos los puntos necesarios para analizar la gráfica. Esto puede ser un indicador de por qué los registros gráficos y tabulares separados son más un problema que una solución.

Obviamente, sin una herramienta afinada y diseñada expresamente para cumplir un objetivo específico, enfocada en las diversas áreas que precisan de representaciones visuales, tanto para representar algún concepto, como para su uso como instrumentos útiles para el análisis, la integración de los registros no tendría razón de ser.

A pesar del desarrollo y el uso de la visualización en las clases de matemáticas, ésta no ha sido incorporada de manera sistemática ni generalizada; tampoco es constante la evaluación de sus ventajas y desventajas. La integración y coordinación de esta herramienta trata de que las representaciones trabajen juntas y no como una conversión del sistema de representación tabular al sistema gráfico o en forma contraria.

El uso de las computadoras y las calculadoras gráficas nos permiten enfatizar más en lo visual, como base para simular y modelar situaciones que conducen a la construcción de funciones en formas simbólicas y gráficas. En algunos momentos, la tecnología en la enseñanza se ha visto reducida al efectivismo e impacto visual, lo cual la reduce a un uso mecánico y superficial.

El registro algebraico integrado con los demás registros usados durante el desarrollo, fue una herramienta que permitió analizar y descubrir cuáles eran los puntos que se tenían que analizar. Los conocimientos previos, libres de toda concepción externa sobre la idea de asíntotas y límites, fueron el cimiento para la construcción, la predicción y el uso de otras opciones de solución y comprobación de los límites buscados.

En toda construcción de nuevo conocimiento, el primer acercamiento tiene que ser lo más detallado posible, explicado de la manera adecuada y basado en los conocimientos previos de los estudiantes a los que se les presenta. Esta acción se magnifica cuando el concepto a ser enseñado, debido a su naturaleza, presenta serias dificultades en su comprensión y concepción en los estudiantes. Si a esto aunamos la contaminación del conocimiento con elementos externos que se pudieran considerar erróneos o faltos de profundización y entendimiento por parte de los profesores, la tarea de la comprensión del concepto por parte del alumno se ve seriamente afectada por todos estos elementos.

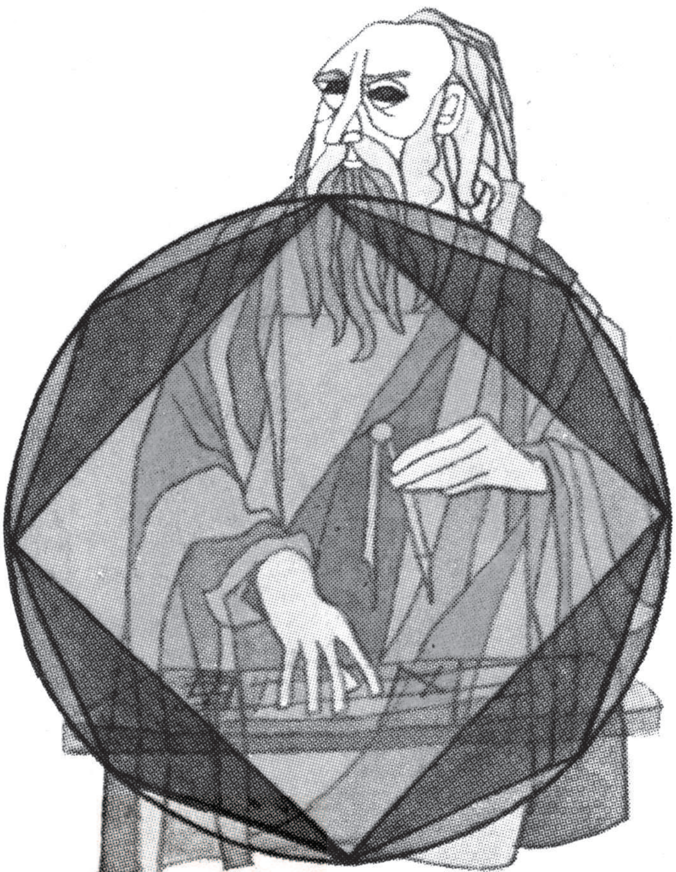
Un acercamiento al conocimiento ayudado por herramientas diseñadas ex profeso para el objetivo que se pretende conseguir, parecen ser una parte vital del primer contacto con el nuevo conocimiento.

La propuesta aplicada a los estudiantes nos permitió sentar las bases para una profundización y una posterior formalización del concepto de límite. Los estudiantes llegaron en la mayoría de los ejercicios, a las mismas conclusiones que los desarrollados por los profesores y en muchos de ellos la información que presentan los problemas propuestos con esta herramienta permitieron un análisis más extenso y fundamentado que la herramienta tradicional.

Los profesores han incluido un elemento más de análisis en la solución de problemas, lo que les permite profundizar en este tipo de conceptos que representan una gran dificultad para su estudio y comprensión.

BIBLIOGRAFÍA Y REFERENCIAS

ARTIGUE, M. Ingeniería didáctica, En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas,* Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1995, Pp. 33–61.
CABALLERO, A. *Iniciación al cálculo diferencial e integral*, Editorial Esfinge, México, D. F., 2005.
COOLIDGE, J. A *History of Geometrical Methods*, , Dover Publications Inc. New York, USA, 1963.
CRUZ J. Sistema para la gestión, evaluación y administración de e-learning para la enseñanza de las matemáticas (Sistema E+), En Lezama, J. (Ed). Actas de la XVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, México, D. F., 2005 CLAME, Pp. 259-264.
CRUZ, J. *Diversas concepciones de asíntotas como elementos didácticos en la conceptualización del límite a nivel precálculo*, Tesis de Maestría no publicada, Unidad Académica de Matemáticas, CIMATE-UAGRO, México, 2006.
DESCARTES consultado en enero de 2008. Disponible en: http://descartes.cnice.mec.es/
DUNHAM, P. H. *Mathematical confidence and performance in thecnology enhanced precalculus: Gerder–related differences*, Tesis Doctoral, Ohio State University, 1991.
DUVAL, R. *Semiosis y pensamineto humano. Registros semióticos y aprendizaje inteletuales,* Universidad del Valle, Cali, Colombia, 1999.
GOODMAN, A. *Geometría Analítica y Cálculo*, UTEHA, México, D. F. 1980.
GRANVILLE, W. *Cálculo diferencial e integral*, Editorial LIMUSA, México, D. F. 1980.
LEHMAN, C. *Geometría Analítica*, Editorial LIMUSA, México, D.F. 1984.
LEZAMA, J. *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*, Tesis de Doctorado no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México, 2003.
LUCAS, T. y James, R. *Matemáticas I*, U.T.E.H.A. México, D.F. 1979.
MARTÍNEZ, G. *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción del conocimiento, El caso de su funcionamiento en los exponentes*, Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigación en Ciencia Avanzada y Tecnología Aplicada, IPN, México, 2003.



Euclídes (330 - 275 a. c.)